WPROWADZENIE DO PRAKTYCZNEGO PLANOWANIA EKSPERYMENTU

Janusz Konkol, Politechnika Rzeszowska, Zakład Inżynierii Materiałowej i Technologii Budownictwa

Metody matematyczne najczęściej znajdują zastosowanie w analizie wyników badań. Jest to podejście jak najbardziej słuszne i celowe, jednak należy stwierdzić, że ich zastosowanie na tym etapie badań jest spóźnione. Zapomina się, że metody matematyczne powinny się pojawić jako podstawowe narzędzie na etapie programowania eksperymentu [1]. Celem niniejszego opracowania jest zwrócenie szczególnej uwagi na etap badań zwany planowaniem eksperymentu. Na przykładzie badań betonów, przy wykorzystaniu teorii eksperymentu i programu *STATISTICA*, pokazane zostało znaczenie zastosowania tego rodzaju podejścia do programowania badań, jego zalety, ograniczenia oraz uzyskany efekt końcowy.

Planowanie eksperymentu na przykładzie badań betonów
Etap I. Cel badań oraz charakterystyka obiektu badań

Pierwszym ważnym etapem badań jest postawienie problemu badawczego wymagającego rozwiązania na drodze doświadczalnej, jego weryfikacja w stosunku do obecnego stanu wiedzy w tym zakresie oraz charakterystyka obiektu badań.

Celem każdego rodzaju badań doświadczalnych jest uzyskanie informacji dotyczącej zależności między wielkościami przyjętymi jako wejściowe (zmienne niezależne) a wielkościami wyjściowymi (zmienne zależne). Tego rodzaju zależność najczęściej przedstawia się w postaci aproksymującej funkcji obiektu badań; niekiedy uzyskana zależność staje się modelem matematycznym obiektu badań. Dzieje się tak wówczas, gdy uzyskany model to zależność o charakterze przyczynowo-skutkowym bazująca na analizie merytorycznej obiektu badań. Zatem nie każda uzyskana aproksymująca funkcja obiektu badań będzie modelem matematycznym, jednak może ona być wykorzystana na przykład w celach optymalizacyjnych czy symulacyjnych. Innym efektem badań może być ustalenie istotności wpływu wielkości wejściowych na wielkości wyjściowe, co umożliwia eliminację czynników nieistotnych.

Charakterystyka obiektu badań polega natomiast na ustaleniu zbioru wielkości wejściowych (zmiennych niezależnych), wyjściowych (zmiennych zależnych), stałych oraz wielkości zakłócających. Ten etap badań ma kluczowe znaczenie, gdyż błędy związane z niedokładnym rozpoznaniem obiektu badań mogą skutkować uzyskaniem

Copyright © StatSoft Polska 2008

nieadekwatnego modelu, a przede wszystkim stratą pieniędzy i czasu. Ważne jest tu zatem odpowiednie przygotowanie merytoryczne.

W przykładowych badaniach betonów, na podstawie wiedzy z zakresu technologii betonów, określono cel badań polegający na poszukiwaniu związków między strukturą betonu a jego właściwościami wytrzymałościowymi. Przedmiotem badań jest beton; jest to mieszanina wody (W), cementu (C), piasku (kruszywa drobnego, K_D) i kruszywa grubego (K_G). Te wielkości wstępnie przyjęto jako zmienne niezależne. Jednak w celu uproszczenia późniejszych analiz skład betonu opisano wiążąc niektóre wielkości wejściowe ze sobą. Ostatecznie przyjęto jako wielkości wejściowe (zmienne niezależne) dwie wielkości: stosunek wodno-cementowy W/C oraz udział kruszywa grubego odniesiony w stosunku do piasku K_G/K_D. Takie przyjęcie zmiennych wejściowych jednoznacznie determinuje skład badanego betonu oraz redukuje liczbę zmiennych niezależnych z czterech do dwóch. Dodatkową, trzecią zmienną niezależną jest rodzaj kruszywa. Wybrano, ze względu na kształt ziaren, jeden rodzaj kruszywa łamanego (bazalt) i jeden rodzaj kruszywa otoczakowego (żwir). Dokonano dalszej klasyfikacji zmiennych, ustalając wielkości wyjściowe (zmienne zależne). W prezentowanym przykładzie wybrano jako zmienne zależne moduł Younga E oraz wytrzymałość betonu na ściskanie f_c. Wielkości stałe natomiast to: rodzaj użytego cementu (CEM I 32,5 R z cementowni Chełm), piasek do 2 mm, proporcja cementu do piasku wynosząca 1:1,76 (w przypadku betonu na kruszywie łamanym bazaltowym, BB) i 1:1,38 (w przypadku betonu na kruszywie otoczakowym żwirowym $BŻ$), sposób dozowania składników, sposób i czas mieszania oraz zagęszczenia mieszanki betonowej, warunki dojrzewania próbek, czas i sposób badania, zastosowany sprzęt.

Etap II. Wybór optymalnego planu badań

Niejednokrotnie świadomie, bądź nieświadomie, planując badania wybieramy plan kompletny. Chcąc ograniczyć koszty i czas badania zawężamy zakres badań poprzez eliminację wielkości wejściowych lub zmniejszenie liczby wartości wielkości wejściowych. Ostatecznie okazuje się wówczas, że nasz plan nie spełnia oczekiwań. Zakres badań jest zbyt wąski, a liczba zmiennych tak ograniczona, że sukces badawczy stoi pod znakiem zapytania. Rozwiązaniem może okazać się zastosowanie w naszych badaniach planowania eksperymentu. Jedną z największych zalet zastosowania planowania eksperymentu jest możliwość uzyskania wymiernych efektów w postaci zmniejszenia nakładów finansowych, potrzebnych na przeprowadzenie danego doświadczenia, jak również zmniejszenie nakładów czasu. Zyski te są efektem zastosowania jednego z planów badań. Wybór zaś planu badań zależy od celu i specyfiki danego rodzaju badań.

Załóżmy, że chcemy przeprowadzić badania betonu dla dwóch wielkości wejściowych, którymi są: stosunek wodno-cementowy W/C oraz udział kruszywa grubego w stosunku do piasku K_G/K_D. Dodatkową zmienną niech będzie rodzaj kruszywa grubego, na przykład bazaltowe i żwirowe. Przewidując nieliniowe zależności funkcyjne między zmiennymi niezależnymi a wielkościami wyjściowymi przyjęto, że planuje się przeprowadzić badania dla pięciu wartości pośrednich. Załóżmy, że dla stosunku wodno-cementowego W/C będzie

 Copyright © StatSoft Polska 2008

to zakres zmienności od 0,4 do 0,6, czyli przykładowo wartości 0,4; 0,45; 0,5; 0,55 i 0,6. Przyjmując również pięć wartości udziału kruszywa grubego w stosunku do piasku K_G/K_D, potrzebna do przeprowadzenia liczba punktów badawczych w przypadku planu kompletnego to 5×5×2 = 50 (patrz tabela 1, plan nr 1). Przemnażając uzyskaną łączną liczbę punktów badawczych razy liczbę próbek (na przykład pięć), dla każdego punktu planu badań, otrzymujemy dość pokaźną liczbę próbek. Badacz może stwierdzić, że nie jest w stanie wykonać takiej liczby badań, ewentualnie badania będą wówczas za drogie lub nie można ich przeprowadzić ze względów technicznych. Załóżmy, że dopuszczalny zakres badań, określony przez osobę finansującą badania, to sto próbek. Taką liczbę możemy uzyskać, kolejno redukując liczbę wartości wielkości wejściowych (patrz tabela 1, plany nr 2-4) lub jednocześnie redukując liczbę zmiennych niezależnych (patrz tabela 1, plan nr 5). Podsumowując, warunek może zostać spełniony, gdy ograniczymy liczbę wartości wielkości wejściowych dla każdej zmiennej do trzech punktów lub odrzucimy zmienną rodzaj kruszywa. Konsekwencją takiego postępowania będzie trudność wychwycenia kształtu funkcji lub jej ekstremum, jeżeli funkcja będzie nieliniowa, bądź ograniczenia możliwej do uzyskania informacji (wpływ rodzaju kruszywa).

Tabela 1. Zestawienie porównawcze planu kompletnego z innymi rozwiązaniami.

Plan		Liczba wartości wielkości wejściowych dla			Konieczna liczba punktów badawczych (próbek*)
		W/C	K_G/K_D	rodzaju kruszywa	
kompletny	1	5	5	2	5×5×2 = **50 (250)**
	2	4	4	2	4×4×2 = **32 (160)**
	3	4	3	2	4×3×2 = **24 (120)**
	4	3	3	2	3×3×2 = **18 (90)**
	5	4	4	1	4×4×1 =**16 (80)**
inny	6	5	5	2	**26 (130)**
	7	**5**	**5**	**2**	**20 (100)**
* przeliczenia dla przykładowej liczby pięciu próbek w każdej serii Plan nr 6 to plan rotalny uniformalny, plan nr 7 to ostatecznie wybrany plan.					

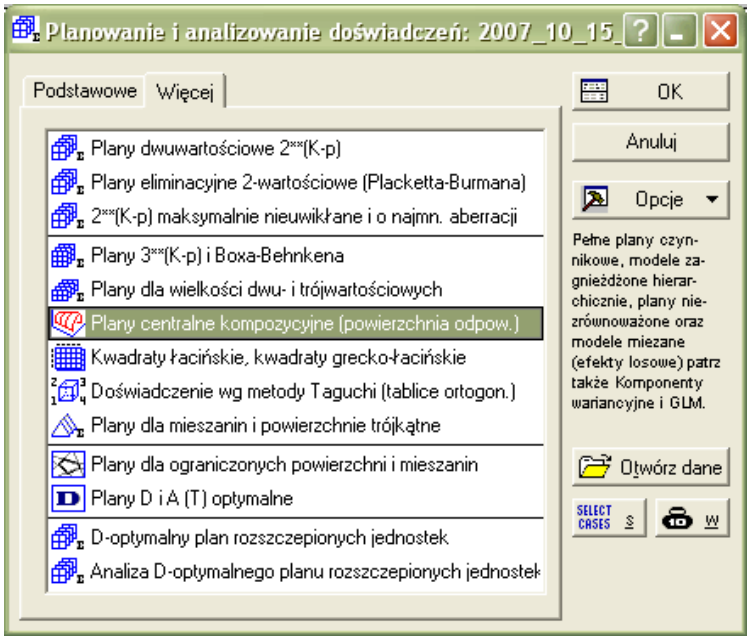
Okazuje się, że spełnienie postawionego warunku, co najwyżej stu próbek, jest możliwe bez konieczności zmiany zamierzonej liczby wielkości wejściowych oraz eliminacji zmiennej rodzaj kruszywa. Optymalnym rozwiązaniem jest przyjęcie planu badań innego niż kompletny, na przykład planu poliselekcyjnego (patrz tabela 1, plany nr 6 i 7).

Pomocny na tym etapie badań może być program *STATISTICA*. Umożliwia on generowanie różnego rodzaju planów badań (moduł *Planowanie doświadczeń* , rys. 1).

Są to między innymi:

- plany dwuwartościowe kompletne lub frakcyjne, stosowane wówczas, gdy czynniki wpływające na proces mogą przyjmować tylko dwie wartości -1 i +1;

- plany eliminacyjne dwuwartościowe stosowane, gdy liczba wielkości wejściowych sięga nawet 127;
- plany z trójwartościowymi wielkościami wejściowymi (-1, 0 i +1);
- plany, w których część czynników wejściowych jest dwuwartościowa, a cześć trójwartościowa;
- plany centralne kompozycyjne z pięciowartościowymi wielkościami wejściowymi ($-\alpha$, -1, 0, +1, $+\alpha$).



Rys. 1. Okno modułu *Planowanie doświadczeń*.

Rodzaj wybranego planu zależy od specyfiki badań. Czasem wystarczające jest przyjęcie tylko dwóch wartości dla wielkości wejściowych (plany dwuwartościowe). Z góry zakładamy wówczas, że wpływ wielkości wejściowych na wielkość wyjściową ma charakter liniowy. Niekiedy jednak, gdy nie wiadomo, jaki jest wpływ wielkości wejściowej na wyjściową (model nieliniowy), należy liczbę wartości wielkości wejściowej zwiększyć, na przykład do trzech (plany trójwartościowe) bądź pięciu (plany centralne kompozycyjne).

Po ustaleniu rodzaju planu i liczby układów planu należy podjąć decyzję dotyczącą ewentualnych powtórzeń w obrębie każdego układu. Jest to celowe, gdyż wielkości wyjściowe to najczęściej zmienne losowe i istotne jest ustalenie zmienności wyników pomiarów wewnątrz każdego jego układu, co mówi o wielkość błędu losowego w pomiarach.

Kolejnym krokiem w planowaniu eksperymentu jest ustalenie zakresu zmienności wielkości wejściowych oraz sposobu ich dyskretyzacji. Ustalenie zakresu w zasadzie jest niezależne od przyjętego planu, a jedynie jest wynikiem rozpoznania stanu wiedzy w tym zakresie, jak również możliwości technicznych. Sposób dyskretyzacji natomiast jest ściśle związany z planem badań. Z uwagi na cel poznawczy najlepszym rozwiązaniem jest przyjęcie jak największego zakresu zmienności wartości wielkości wejściowych. Należy

 Copyright © StatSoft Polska 2008

jednak pamiętać, że punkty planu badań to przecież kombinacje wartości wielkości wejściowych. Zły dobór wartości skrajnych może spowodować uzyskanie w planie kombinacji niemożliwych do wykonania, absurdalnych lub zakłócających prawidłowe działanie obiektu badań. Równie poważne trudności może napotkać badacz podczas dyskretyzacji zakresu zmienności wielkości wejściowych. Może okazać się, że narzucone przez plan wartości zmiennej są niemożliwe do przyjęcia, gdyż zmienna ma charakter zmiennej skokowej, a nie ciągłej. Podczas dyskretyzacji należy również pamiętać o niedokładnościach wielkości wejściowych. Nie może mieć miejsca sytuacja, w której różnica między kolejnymi wartościami wielkości wejściowej jest mniejsza niż podwójna wartość błędu oszacowania tej wielkości wejściowej. Ustalenie odpowiednich zakresów wartości wielkości wejściowych i ich dyskretyzacja jest zatem pewnym kompromisem między celem poznawczym, zapewnieniem prawidłowego działania obiektu badań i wymaganiami teorii planowania eksperymentu.

Jak wybrać odpowiedni plan? Czy ma to być plan kompletny, selekcyjny, randomizowany czy inny? Jak dobrać wielkości wejściowe? Jak dokonać ich dyskretyzacji? Odpowiedzi na te pytania to najważniejsze decyzje podejmowane przez badacza. Decyzje, które zaważą o sukcesie lub porażce badań. Podjęcie właściwej decyzji doprowadzi jednak do celu, którym jest utworzenie funkcji obiektu badań, przy możliwie najmniejszej pracochłonności i minimalizacji kosztów. Wybierając optymalny plan badań, należy kierować się trzema kryteriami: realizowalności, informatywności i efektywności. Pierwsze z kryteriów dotyczy sprawdzenie możliwości wykonania badań objętych planem, czyli prawidłowego działania obiektu badań w zaplanowanych badaniem warunkach. Jak już wspomniano, ważna jest tu kwestia ustalenia parametrów wejściowych, ich kombinacji i dokładności w stosunku do przyjętej dyskretyzacji. Niespełnienie choć jednego z warunków wyklucza plan badań. Kryterium informatywności natomiast ma za zadanie ustalenie, czy plan badań zapewnienia uzyskanie informacji potrzebnej do spełnienia celu badań. Między innymi należy sprawdzić, czy liczba układów planu jest większa, a w granicznym przypadku równa niewiadomej liczbie współczynników funkcji aproksymującej obiekt badań. Ostatecznym kryterium wyboru optymalnego planu eksperymentu jest kryterium efektywności. Wybrany plan badań powinien zapewnić przeprowadzenie badań przy minimalizacji nakładów na jego realizację.

Kierując się powyższymi wskazówkami oraz wiedzą z zakresu technologii betonu, w rozważanym przykładzie przyjęto zakres wielkości wejściowych następująco: dla stosunku wodno-cementowego *W/C* od 0,4 do 0,6. Przyjęcie zakresu drugiej wielkości wejściowej, tj. udziału kruszywa grubego w stosunku do drobnego, wymagało wykonania badań rozpoznawczych, dla danego rodzaju składników, oraz przeliczeń pomocniczych. Uzyskana mieszanka betonowa powinna mieć odpowiednią urabialność oraz spełniać wymagania normowe (m.in. odpowiednia ilość zaprawy potrzebna do otulenia ziaren kruszywa).

Za optymalny ze względu na trzy kryteria doboru planu uznano plan dwuczynnikowy polisekcyjno-rotalno-quasi-uniformalny (PS/DS-P: $\lambda(\tilde{\lambda})$; i=2) z dwukrotnym powtórzeniem doświadczenia w punkcie centralnym [1]. Jest to jednocześnie jeden z planów centralnych kompozycyjnych , możliwych do wygenerowania w programie *STATISTICA*. Przyjęty

Copyright © StatSoft Polska 2008

plan przewiduje, jak zakładano wstępnie, przeprowadzenie badań dla pięciu wartości wielkości wejściowych x_1 (W/C) i x_2 (K_G/K_D). Jak każdy plan określony jest przez ustaloną liczbę kombinacji wartości unormowanych, kodowych $\hat{x}_i$ wynoszących w przypadku tego planu 0, ±1 i ±1,414 (rys. 2). Operowanie bezwymiarowymi wartościami wielkości wejściowych eliminuje problemy mogące wystąpić w przypadkach, gdy wartości wielkości wejściowych są w dużym stopniu zróżnicowane oraz jednocześnie pozwala na duży stopień uogólnienia stosowanych procedur. W przypadku wybranego planu relacja standaryzowania opisana jest wzorem:

$$\hat{x}_i = \frac{2\alpha(x_i - \bar{x}_i)}{(x_{i,max} - x_{i,min})} \text{ lub } x_i = \bar{x}_i + \frac{\hat{x}_i}{\alpha}(x_{i,max} - \bar{x}_i),\ i=1,2, \qquad (1)$$

gdzie:

$\hat{x}_i$ –wartość unormowana (kodowa),

α – ramię gwiezdne planu; w przyjętym planie $\alpha = 1{,}414$,

x_i – wartość rzeczywista kolejnej zmiennej,

$x_{i,\,max}$, $x_{i,\,min}$ – wartości maksymalna i minimalna danej zmiennej rzeczywistej,

$\bar{x}_i$ – wartość średnia danej zmiennej rzeczywistej.

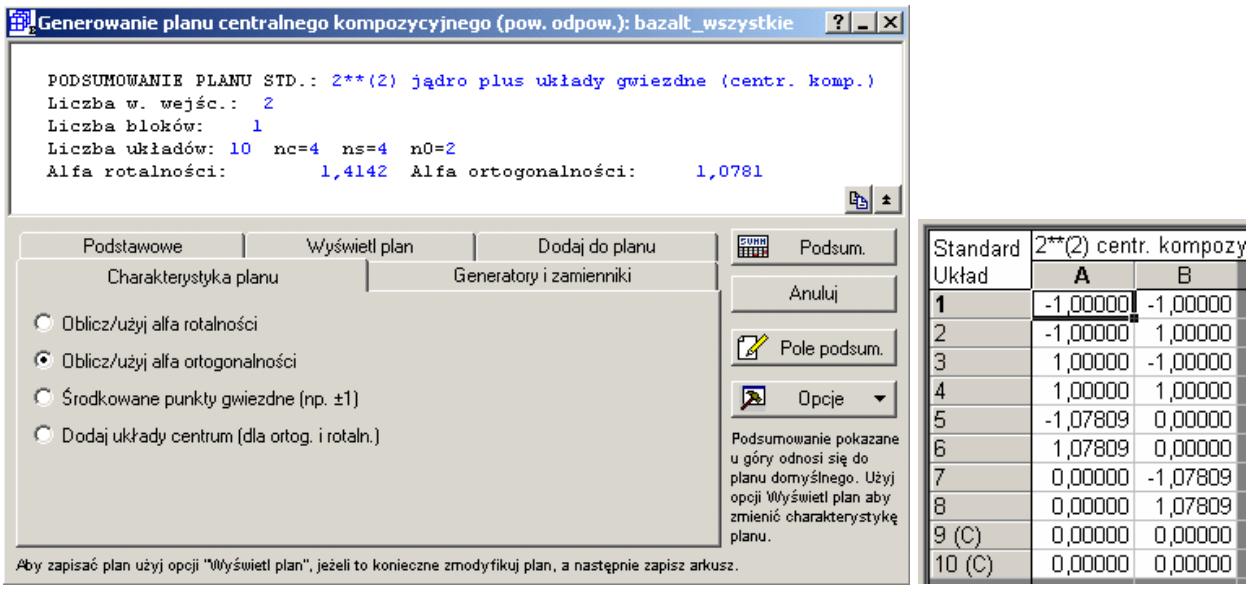
Standard Układ	2**(2) centr. kompozyc., nc=4 ns=4 n0=2 Ukł.=10	
	x1	x2
1	-1,00000	-1,00000
2	-1,00000	1,00000
3	1,00000	-1,00000
4	1,00000	1,00000
5	-1,41421	0,00000
6	1,41421	0,00000
7	0,00000	-1,41421
8	0,00000	1,41421
9 (C)	0,00000	0,00000
10 (C)	0,00000	0,00000

Rys. 2. Wygenerowany plan centralny kompozycyjny.

W przypadku przyjętego planu rotalnego (wybrana opcja α rotalności) pierwsze cztery układy w tym planie stanowią tzw. jądro planu (są to układy planu kompletnego 2×2), układy od 5 do 8 to punkty gwiezdne, natomiast układy 9 i 10 tworzą centrum. W przyjętym planie, z uwagi na kryterium informatywności, występuje nadwyżka układów planu w stosunku do niewiadomych współczynników funkcji obiektu badań. Funkcja ta, w przypadku tego rodzaju planu, ma postać liniową lub nieliniową, najczęściej jest to wielomian drugiego stopnia (przyjęto postać (2) z sześcioma niewiadomymi współczynnikami). Nadwyżki są wykorzystywane do analizy statystycznej niedokładności i istotności. Mogą również umożliwić zmianę założonej postaci funkcji; np. dodanie dodatkowego czynnika.

Alternatywą dla przyjętego planu może być plan ortogonalny; uzyskany w przypadku przyjęcia ramienia gwiezdnego planu jako α ortogonalności (rys. 3).

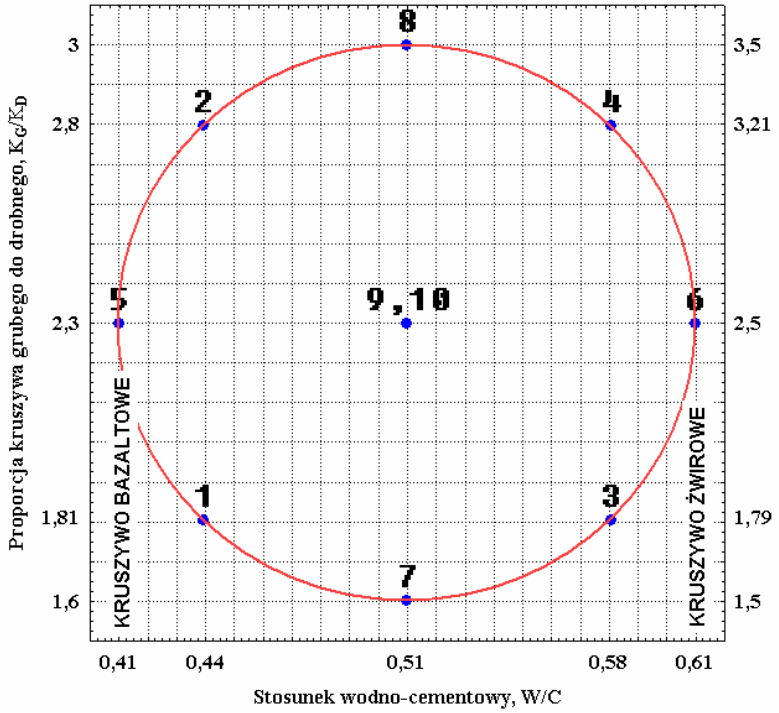
 Copyright © StatSoft Polska 2008



Standard	2**(2) centr. kompozy	
Układ	A	B
1	-1,00000	-1,00000
2	-1,00000	1,00000
3	1,00000	-1,00000
4	1,00000	1,00000
5	-1,07809	0,00000
6	1,07809	0,00000
7	0,00000	-1,07809
8	0,00000	1,07809
9 (C)	0,00000	0,00000
10 (C)	0,00000	0,00000

Rys. 3. Ewentualna modyfikacja planu badań (przyjęte α ortogonalności).

Ortogonalność planu ułatwia statystyczną analizę wyników badań oraz powoduje niezależność oceny współczynników wielomianu aproksymującego. Plany ortogonalne nie są jednak najlepsze ze względu na zależne od wielkości wejściowych niedokładności wielomianu aproksymującego. Ujednolicenie niedokładności uzyskuje się w przypadku zastosowania planów rotalnych.



Rys. 4. Rozmieszczenie punktów badań (układów) w przyjętym planie.

Ostatecznie przyjęto plan rotalny (rys. 2 i 4), który przewiduje dla dwóch wielkości wejściowych x_1 (W/C) i x_2 (K_G/K_D) przeprowadzenie badań dla dziesięciu układów. Trzecia

zmienna, którą jest rodzaj kruszywa, uwzględniona zostanie przez zastosowanie dwóch oddzielnych planów, dla betonu na kruszywie bazaltowym i betonu na kruszywie żwirowym. Rozmieszczenie punktów w planie badań po zamianie wielkości kodowych na rzeczywiste wartości zmiennych x_1 (W/C) i x_2 (K_G/K_D) przedstawia rys. 4.

Na podstawie składu receptur próbnych dokonano przeliczenia ilości składników, dla każdego układu planu. Zestawienia proporcji składników przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie wartości kodowych, zmiennych rzeczywistych i proporcji składników mieszanek betonowych na kruszywie bazaltowym (*BB*) i żwirowym (*BŻ*).

Nr serii	Wartości kodowe		Zmienne rzeczywiste			Proporcje składników (ilościowe)				
	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	W/C (x_1)	K_G/K_D (x_2)		Cement, C	Woda, W	Piasek, K_D	Kruszywo grube, K_G	
				BB	*BŻ*				*BB*	*BŻ*
1	-1	-1	0,44	1,81	1,79	1,0	0,44	1,76* 1,38**	3,18	2,47
2	-1	1	0,44	2,80	3,21		0,44		4,93	4,42
3	1	-1	0,58	1,81	1,79		0,58		3,18	2,47
4	1	1	0,58	2,80	3,21		0,58		4,93	4,42
5	-1,414	0	0,41	2,30	2,50		0,41		4,06	3,45
6	1,414	0	0,61	2,30	2,50		0,61		4,06	3,45
7	0	-1,414	0,51	1,60	1,50		0,51		2,82	2,07
8	0	1,414	0,51	3,00	3,50		0,51		5,29	4,83
9	0	0	0,51	2,30	2,50		0,51		4,06	3,45
10	0	0	0,51	2,30	2,50		0,51		4,06	3,45
* - wartość dla betonu na kruszywie bazaltowym ** - wartość dla betonu na kruszywie żwirowym										

Etap III. Realizacja badań

Z szerokiego zakresu badań wytrzymałościowych, stereologicznych i fraktalnych [2] wybrano dwie cechy wytrzymałościowe betonu: moduł Younga E oraz wytrzymałość betonu na ściskanie f_c. Moduł Younga E określono na podstawie badań przeprowadzonych na belkach o wymiarach 8×15×70 cm, zaś wytrzymałość na ściskanie f_c na kostkach sześciennych o boku 10 cm. Dla każdego z dziesięciu punktów planu eksperymentu wykonano po cztery próbki do badania modułu E i sześć próbek do badania wytrzymałości na ściskanie f_c.

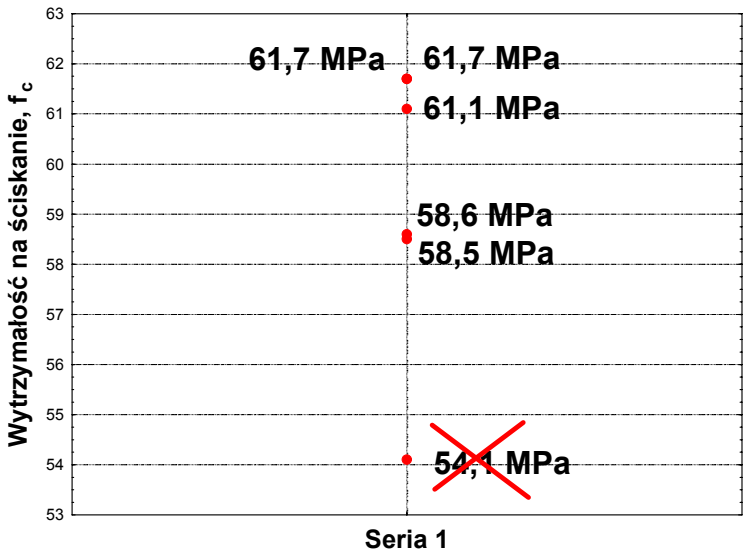
 Copyright © StatSoft Polska 2008

Etap IV. Analiza wyników. Funkcja obiektu badań

Analiza wyników badań jest zawsze dwuczęściowa i obejmuje analizę statystyczną oraz analizę merytoryczną. Obie analizy są równie ważne. Pierwsza umożliwia otrzymanie adekwatnej do wyników pomiarów funkcji obiektu badań, druga pozwala wyjaśnić otrzymaną zależność z punktu widzenia wiedzy z zakresu badań oraz zamienić uzyskaną funkcję na model matematyczny danego zjawiska.

We wszystkich analizach statystycznych przyjęto poziom istotności równy 0,05. Jest to wartość zwykle przyjmowana w badaniach betonów.

Jako pierwszy krok analizy statystycznej wyników badań przeprowadzono sprawdzenie występowania w wynikach modułu E i wytrzymałości na ściskanie f_c ***błędów grubych***. Analizę przeprowadzono ***testem Dixona*** [3]. Identyfikację obserwacji odstających można również przeprowadzić, wykorzystując *test Grubbsa* dostępny w wersji 8 programu *STATISTICA*. Na podstawie przeprowadzonej analizy niedokładności pomiarów *testem Dixona* odrzucono trzy wyniki dla betonu żwirowego. Dla przykładu na schemacie poniżej przedstawiono tok postępowania przy odrzucaniu wartości skrajnej wytrzymałości na ściskanie f_c = 54,1 MPa (beton żwirowy, seria 1).



1. Uporządkowano wyniki rosnąco (pierwsza wartość to wartość testowana; 54,1 MPa)

2. Obliczono statystykę *testu Dixona*:

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_n - z_1} = \frac{58{,}5 - 54{,}1}{61{,}7 - 54{,}1} = 0{,}579$$

3. Odrzucenie wyniku, jeżeli

$r > r_{kryt.}$

$r = 0{,}579 > r_{0{,}05;6} = 0{,}560$

zatem wynik 54,1 należy usunąć

Rys. 5. Schemat postępowania w teście Dixona.

Dopiero po usunięciu z wyników błędów grubych wyznaczono ***miary położenia*** (wartość średnią) i ***rozproszenia*** (odchylenie standardowe i błąd standardowy, tj. odchylenie standardowe średniej). Uzyskane przykładowe wyniki przedstawiono w postaci graficznej i tabeli (rys. 6); wykorzystano moduł *Statystyki podstawowe i tabele* (*Przekroje, prosta ANOVA*) programu *STATISTICA*.

Copyright © StatSoft Polska 2008

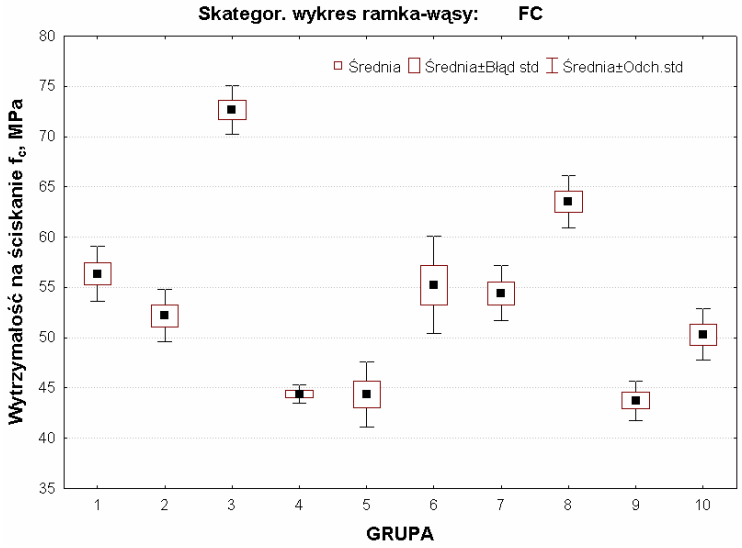


Tabela przekrojów statystyk opisowych (bazalt
N=60 (Zmienne zależne nie zawierają BD)

GRUPA	FC Średnie	FC N	FC Odch.std	FC Bł. std.
1	56,35500	6	2,760179	1,126838
2	52,17000	6	2,603267	1,062779
3	72,64500	6	2,399081	0,979421
4	44,38500	6	0,927335	0,378583
5	44,34000	6	3,235831	1,321022
6	55,24500	6	4,829376	1,971584
7	54,42000	6	2,748563	1,122096
8	63,52500	6	2,640801	1,078102
9	43,75500	6	1,961436	0,800753
10	50,31000	6	2,570284	1,049314

Tabela przekrojów statystyk opisowych (bazalt_wszystkie)

Rys. 6. Miary położenia i rozproszenia w przypadku wytrzymałości na ściskanie f_c dla betonu bazaltowego.

Następnym bardzo ważnym krokiem analizy wyników jest sprawdzenie ***jednorodności wariancji***. Jest to warunek konieczny do spełnienia. Brak jednorodności wariancji uniemożliwia poszukiwanie funkcji obiektu badań.

Jednorodność wariancji dla prób o różnej liczebności sprawdzono ***testem Bartletta*** z modułu *ANOVA* (*Jednoczynnikowa ANOVA)* programu *STATISTICA*. Na podstawie uzyskanych wartości komputerowego poziomu istotności *p* (na rys. 7 przedstawiono przykładowe wyniki uzyskane dla betonu bazaltowego) wykazano jednorodność wariancji, na poziomie istotności 0,05, w przypadku wybranych cech mechanicznych badanych betonów ($p > 0{,}05$).

Testy jednorodności wariancji (bazalt_wszystk
Efekt: GRUPA

	Hartleya F-max	Cochrana C	Bartlett Chi-kw.	df	p
E	8,824958	0,214223	4,494953	9	0,875929

Testy jednorodności wariancji (bazalt_wszystkie)

Testy jednorodności wariancji (bazalt_wszystkie
Efekt: GRUPA

	Hartleya F-max	Cochrana C	Bartlett Chi-kw.	df	p
FC	27,12119	0,292316	11,76977	9	0,226602

Testy jednorodności wariancji (bazalt_wszystkie)

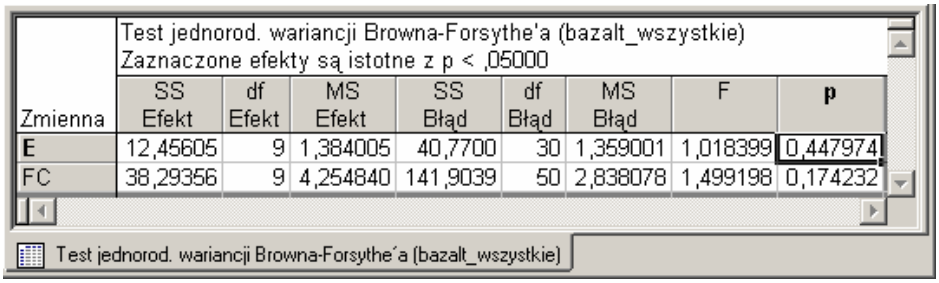
Rys. 7. Wyniki analizy jednorodności wariancji (beton bazaltowy).

Sprawdzenie jednorodności wariancji w programie *STATISTICA* może być również przeprowadzone innymi testami, np. *Levene'a* lub ***Browna-Forsythe'a***; z wykorzystaniem modułu *Statystyki podstawowe i tabele* (*Przekroje, prosta ANOVA)*. Jeżeli oba testy dają wyniki statystycznie nieistotne ($p \geq 0{,}05$, rys. 8), to należy przyjąć hipotezę o jednorodności wariancji.

Z uwagi na różną liczebność wyników dla modułu *E* i wytrzymałości na ściskanie f_c (40 lub 60) oraz możliwość popełnienia błędu analiza jednorodności wariancji przeprowadzona w module *ANOVA* musiała być wykonana dwa razy. W przypadku korzystania

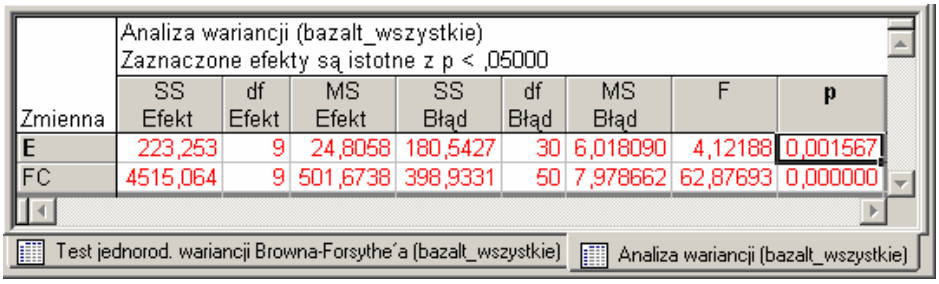
 Copyright © StatSoft Polska 2008

z modułu *Statystyki podstawowe i tabele* (*Przekroje, prosta ANOVA)* nie ma takiej konieczności (patrz obliczona liczba stopni swobody *df*, rys. 8).



Rys. 8. Wyniki testu Browna-Forsythe'a (beton bazaltowy).

Przed wyznaczeniem funkcji obiektu badań sprawdzono również, czy wpływ wielkości wejściowych x_i na wielkość wyjściową z jest istotny (***korelacja kwalitatywna***). Weryfikację przeprowadzono za pomocą ***testu F Snedecora*** (***Fishera***) dla prób o różnej liczebności; wykorzystano moduł *Statystyki podstawowe i tabele* (*Przekroje, prosta ANOVA, Analiza wariancji)* programu *STATISTICA*. Przeprowadzony test jest jednocześnie testem na ***równość średnich***. Uzyskane wartości komputerowego poziomu istotności p mniejsze od 0,05 (ostatnia kolumna tabeli poniżej) świadczą o istotnym wpływie wielkości wejściowych na wyjściowe. Świadczy to również o możliwości odrzucenia hipotezy statystycznej o równości średnich.



Rys. 9. Wyniki analizy wariancji (beton bazaltowy).

Przeprowadzona analiza wariancji, przy zastosowaniu testu F, wykazała istotny wpływ stosunku wodno-cementowego i stosunku kruszywa grubego do drobnego na obie cechy wytrzymałościowe (E i f_c) badanych betonów bazaltowego i żwirowego, na poziomie istotności 0,05.

Następnie dokonano dekompozycji obiektu badań, polegającej na utworzeniu dwóch obiektów badań charakteryzowanych jedną wielkością wyjściową (E lub f_c) oraz zaproponowano ***funkcję aproksymacyjną*** postaci:

$$\breve{z} = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_1^2 + B_3 x_2 + B_4 x_2^2 + B_5 x_1 x_2 \qquad (2)$$

Jak już wspomniano, liczba niewiadomych B_i zaproponowanego wielomianu aproksymującego wynosi 6 i jest mniejsza od liczby układów planu równej 10, co powoduje spełnienie warunku koniecznego ze względu na kryterium informatywności planu.

Copyright © StatSoft Polska 2008

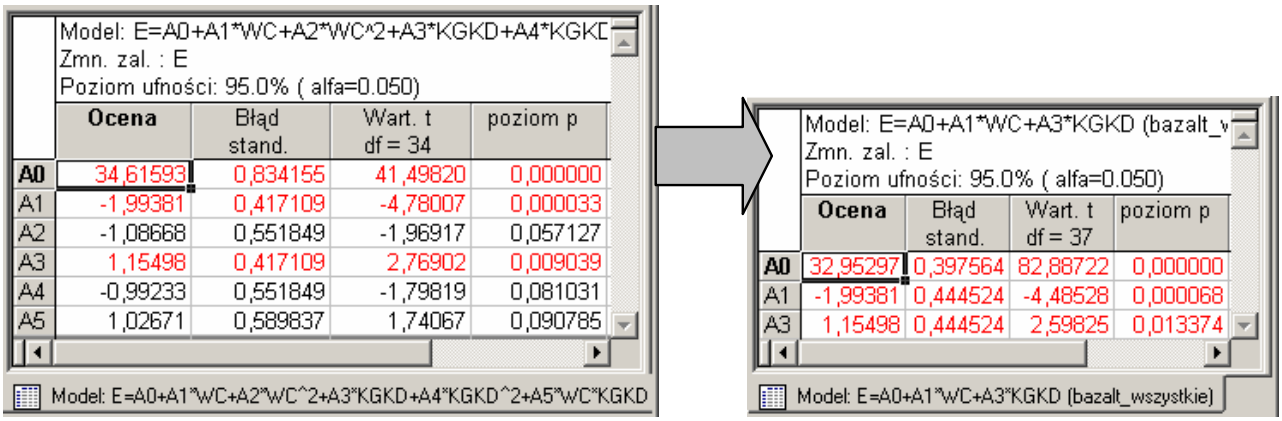
Weryfikację funkcji regresji przeprowadzono na wartościach unormowanych $\hat{x}_i$ dla funkcji obiektu badań postaci:

$$z = A_0 + A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_1^2 + A_3\hat{x}_2 + A_4\hat{x}_2^2 + A_5\hat{x}_1\hat{x}_2 \qquad (3)$$

Stałe A_i i B_i obliczono metodą estymacji quasi-Newtona przy wykorzystaniu programu komputerowego *STATISTICA*.

Na podstawie analizy ***istotności współczynników*** A_i, przeprowadzonej przy wykorzystaniu ***testu t Studenta***, dokonano odrzucenia współczynników uznanych za nieistotne, przy poziomie istotności 0,05. Wykorzystano moduł *Zaawansowane modele liniowe i nieliniowe (Estymacja nieliniowa, Regresja użytkownika)* programu *STATISTICA*.

W przypadku betonu bazaltowego na podstawie *oceny parametrów* funkcji regresji dla modułu E (obliczenia przeprowadzono dla wszystkich 40 wyników) otrzymano, że współczynniki A_2, A_4 i A_5 należy uznać za nieistotne (pierwsza tabela poniżej, p>0,05).

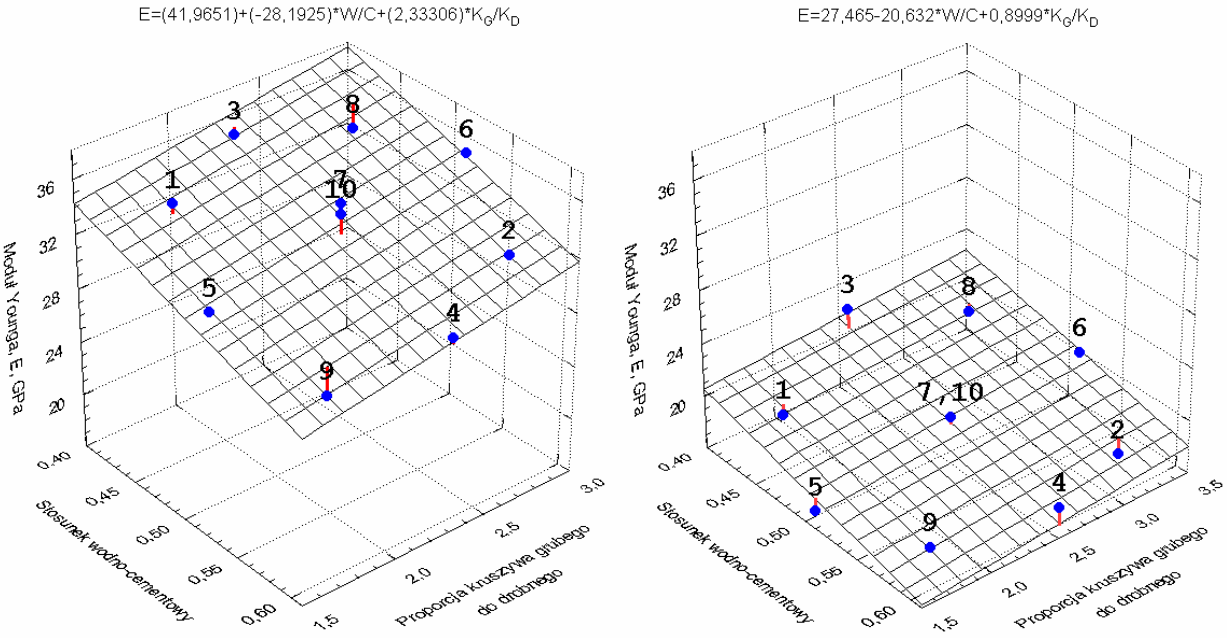


Rys. 10. Eliminacja współczynników nieistotnych (beton bazaltowy).

Po usunięciu współczynników nieistotnych (na rys. 10 tabela po prawej stronie) sprawdzono adekwatność otrzymanej funkcji obiektu badań do wyników pomiarów. Weryfikację adekwatności funkcji regresji przeprowadzono testem χ^2 (chi-kwadrat). Uzyskany w tym przypadku komputerowy poziom istotności p wyniósł 0,133 i jest on większy od 0,05, co świadczy, że otrzymana funkcja obiektu badań jest adekwatna do wyników pomiarów. Współczynnik korelacji R wynosi wówczas 0,649 (0,872 dla średnich), co oznacza, że zmienność modułu E wyjaśniona jest zmianą stosunku wodno-cementowego W/C i udziału kruszywa grubego w stosunku do drobnego K_G/K_D w 64,9 %, a 35,1 % stanowią inne czynniki, w tym czynniki losowe.

Przykład adekwatnych funkcji uzyskanych dla modułu E pokazano na rys. 11. Pierwszy z wykresów dotyczy betonu bazaltowego, a drugi żwirowego. W przypadku obu betonów otrzymano liniową zależność modułu E, zarówno od stosunku wodno-cementowego W/C, jak i proporcji kruszywa grubego do drobnego K_G/K_D. Wzrostowi obu zmiennych niezależnych towarzyszył wzrost modułu E. Jednocześnie wykazano, że betony bazaltowe charakteryzuje większy moduł E, co świadczy o wpływie rodzaju kruszywa grubego na moduł E.

 Copyright © StatSoft Polska 2008



Rys. 11. Uzyskane adekwatne funkcje obiektu badań w przypadku modułu *E* i kruszyw: bazaltowego (po lewej stronie) i żwirowego (po prawej stronie).

W wyniku przeprowadzonej analizy statystycznej wyników badań właściwości mechanicznych zaobserwowano, że wzrost wartości badanych obu cech wytrzymałościowych modułu *E* i wytrzymałości na ściskanie f_c następował przy jednoczesnym zwiększaniu się udziału kruszywa grubego i zmniejszaniu się stosunku wodno-cementowego. Większe wartości mierzonych cech wytrzymałościowych uzyskano w przypadku betonów na kruszywie łamanym, w porównaniu do betonów na kruszywie naturalnym. Są to rezultaty łatwo mogące być wyjaśnione na gruncie technologii betonu. Wzrost bowiem stosunku wodno-cementowego *W/C* „pogarsza" właściwości mechaniczne betonu, a większa ilość kruszywa grubego, o większym module *E*, musi zwiększać wartość modułu *E* całego kompozytu betonowego.

Etap V. Praktyczne wykorzystanie wyników

Jedną z możliwości praktycznego (inżynierskiego) wykorzystania uzyskanych wyników w postaci funkcji aproksymujących jest optymalizacja składu betonu.

Celem optymalizacji, w przypadku prezentowanych badań przykładowych, jest uzyskanie optymalnego składu betonu, ze względu na wybrane właściwości oraz wykazanie związku struktury z właściwościami mechanicznymi tych betonów [2]. Jako zmienne decyzyjne przyjęto stosunek wodno-cementowy *W/C* oraz stosunek kruszywa grubego do drobnego K_G/K_D.

Dziedzinę eksperymentu dla punktów x_1 (*W/C*) i x_2 (K_G/K_D) planu eksperymentu przyjęto następująco:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

Copyright © StatSoft Polska 2008

Zbiór Ω stanowi obszar rozwiązań dopuszczalnych dwuwymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych.

Jako kryteria optymalizacji i wagi przyjęto:

- maksimum współczynnika sprężystości podłużnej E, waga 0,10,
- maksimum krytycznego współczynnika intensywności naprężeń K_{Ic}^{S}, waga 0,25,
- maksimum pracy jednostkowej zniszczenia J_{Ic}, waga 0,10,
- maksimum wytrzymałości na ściskanie f_c, waga 0,25,
- minimum zawartości porów powietrznych w betonie V_V, waga 0,20,
- minimum wymiaru fraktalnego określonego metodą cięciwy D_C, waga 0,05,
- minimum wymiaru fraktalnego określonego metodą pudełkową D_{BC}, waga 0,05,
- konsystencja plastyczna lub gęstoplastyczna według metody *Vebe*, zakres 7-27 s.

Optymalizację składu badanych betonów przeprowadzono przy wykorzystaniu metody funkcji użyteczności U^I i U^{III} przy zastosowaniu programu *Optymal*[1] [4]. Zakresy rozwiązań bardzo dobrych, dobrych i złych określono, przyjmując wartości gorszą (jako 40% zakresu rozrzutu wartości średnich danej cechy) i lepszą (jako 70% zakresu rozrzutu wartości średnich danej cechy).

Wartości funkcji użyteczności $0 \le U^I < 1$ oznacza użyteczność zadowalającą pod względem przyjętych kryteriów optymalizacji, zaś $U^I \ge 1$ oznacza użyteczność bardzo dobrą. W przypadku funkcji użyteczności U^{III} użyteczność zadowalającą stanowi obszar wartości U^{III} z przedziału <0,368; 0,692>.

W wyniku przeprowadzonej optymalizacji uzyskano współrzędne punktów preferowanych dla funkcji użyteczności U^I i U^{III} (punkty zaznaczone na rys. 12 strzałkami):

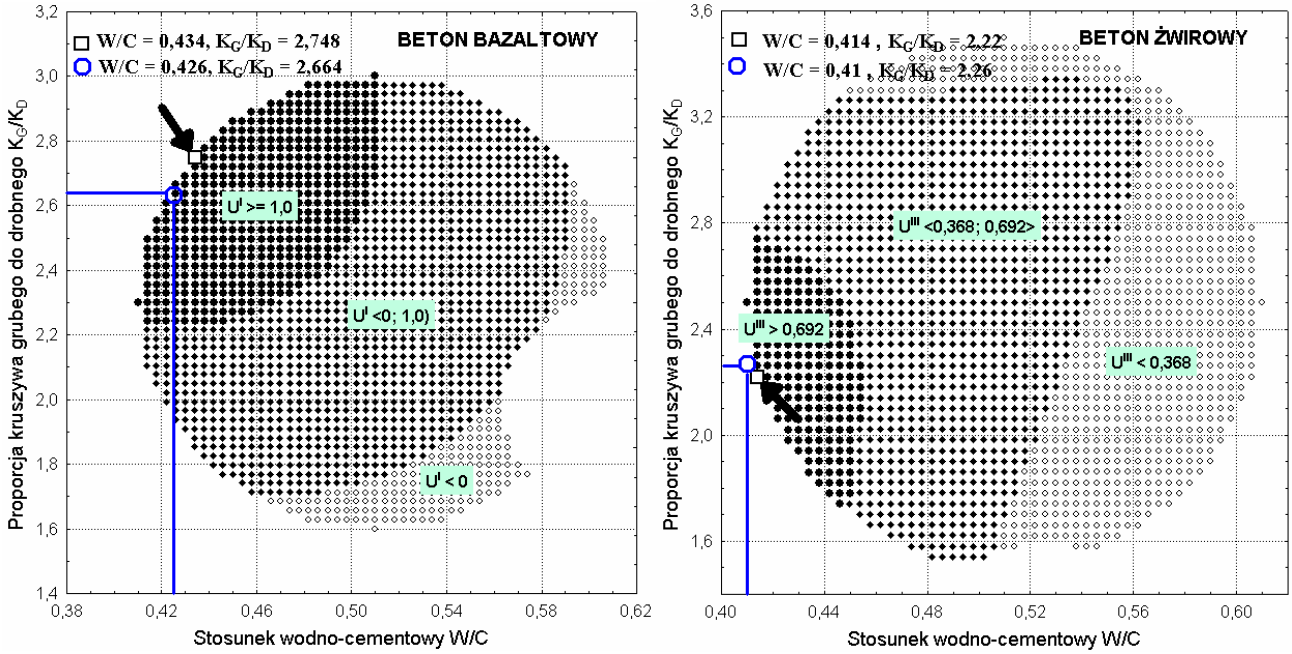
- beton na kruszywie łamanym o największej użyteczności U^I = 1,498 i użyteczności U^{III} = 0,787 zawierał 323,3 kg cementu, 570,1 kg piasku, 1566,7 kg bazaltu, 140,3 l wody przy stosunku wodno-cementowym W/C = 0,434 i proporcji kruszywa grubego do drobnego K_G/K_D = 2,748;
- beton na kruszywie naturalnym żwirowym o największej użyteczności U^I = 1,553 i użyteczności U^{III} = 0,791 zawierał 414,4 kg cementu, 571,8 kg piasku, 1269,3 kg żwiru, 171,6 l wody przy stosunku wodno-cementowym W/C = 0,414 i proporcji kruszywa grubego do drobnego K_G/K_D = 2,22.

Sprawdzono również wpływ uwzględnienia w optymalizacji parametrów stereologicznych (V_V) i fraktalnych (D_C i D_{BC}) na położenie punktu preferowanego (udział tych parametrów w optymalizacji wynosił łącznie 30%). W tym celu przeprowadzono optymalizację tylko ze względu na dwa parametry – K_{Ic}^{S} i J_{Ic} (przyjmując 50% wagę każdego z nich). Otrzymane punkty (punkty zaznaczone kółkami) mieszczą się w obszarach rozwiązań bardzo dobrych i są nieznacznie przesunięte względem wcześniej określonych punktów preferowanych.

[1] Konkol, J. (2001) *Optymal*. Program komputerowy. Rzeszów.

 Copyright © StatSoft Polska 2008

Uzyskana zgodność potwierdza związek parametrów stereologicznych i fraktalnych z właściwościami wytrzymałościowymi betonów.



Rys. 12. Przykładowe rozwiązania preferowane uzyskane w przypadku: betonu bazaltowego i metody funkcji użyteczności U^I (po lewej stronie) oraz betonu żwirowego i metody funkcji użyteczności U^{III} (po prawej stronie).

Podsumowanie

W artykule przedstawiono przykład podejścia do planowania eksperymentu i analizy statystycznej wyników badań betonów z zastosowaniem programu *STATISTICA*. Szeroko opisano wykorzystanie metod matematycznej teorii planowania doświadczeń na etapie programowania badań (charakterystyka obiektu badań, wybór planu badań) oraz analizy regresji i wariancji na etapie opracowania wyników przeprowadzonych eksperymentów.

Celem analizy statystycznej było określenie jakościowego wpływu zmiennych w planie badań, tj. stosunku wodno-cementowego oraz udziału i rodzaju kruszywa grubego, na wybrane cechy betonów, jak również wykazanie związku między strukturą betonu a jego właściwościami.

Praktycznym zastosowaniem planowania eksperymentu wraz z przeprowadzoną analizą statystyczną wyników badań była optymalizacja wielokryterialna składu betonów z uwagi na przyjęte kryteria.

Literatura

1. Polański Z., *Planowanie doświadczeń w technice*, PWN, Warszawa, 1984.

Copyright © StatSoft Polska 2008

2. Konkol J., *Zastosowanie analizy struktury do oceny właściwości betonów*, Rozprawa doktorska, Rzeszów, 2005.
3. Strzałkowski A., Śliżyński A., *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa, 1973.
4. Konkol J., Prokopski G., *Optymalizacja wielokryterialna składu betonów zwykłych z uwzględnieniem parametrów wytrzymałościowych i strukturalnych.* Przegląd Budowlany, 2, s. 23-28, 2006.

 Copyright © StatSoft Polska 2008