BADANIA DOCHODU I RYZYKA INWESTYCJI ZA POMOCĄ ANALIZY ROZKŁADÓW

Agnieszka Pasztyła
Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Katedra Statystyki; StatSoft Polska Sp. z o.o.

Wprowadzenie

Przy podejmowaniu decyzji o zainwestowaniu kapitału inwestor zawsze stara się odpowiedzieć na pytanie, jakiego dochodu może oczekiwać z danej inwestycji oraz jakim ryzykiem jest ona obarczona. Określenie przyszłego dochodu nie jest jednak zadaniem prostym, ponieważ wymaga odwołania się m. in. do poziomu inflacji, stóp procentowych, podatków oraz wydarzeń gospodarczych, które będą miały miejsce w przyszłości. Stąd analitycy finansowi wykorzystują rozkłady prawdopodobieństwa w celu prognozowania dochodu z inwestycji.

Niniejsza praca poświęcona jest zastosowaniu analizy rozkładów w przewidywaniu dochodu i ryzyka inwestycji. W pierwszej części zdefiniowane zostały metody szacowania dochodu, miary ryzyka oraz pojęcie portfela inwestora. W drugiej części zamieszczony został przykład budowy portfela o minimalnym ryzyku.

Metody szacowania dochodu

Podstawową miarą dochodu z inwestycji jest stopa zwrotu w okresie inwestowania (ang. *simple return*) wykorzystująca zasadę kapitalizacji okresowej, wyrażana jako udział dochodu w początkowej wartości kapitału (por. K. Jajuga, T. Jajuga, 1996):

$$r = \frac{P - P_0}{P_0}, \tag{1}$$

gdzie:

r – stopa zwrotu;

P – wartość końcowa (zmienna losowa);

P_0 – wartość początkowa (znana).

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

Ze względu na własności statystyczne w analizie finansowej wykorzystywana jest również logarytmiczna stopa zwrotu (ang. *log return, continuously compounded return*):

$$r = \ln P - \ln P_0 \tag{2}$$

Odpowiada ona kapitalizacji ciągłej, co jest bardziej zgodne z zasadami inwestowania, ponieważ po sprzedaży jednych instrumentów środki finansowe mogą być prawie natychmiast inwestowane w inne.

Ponadto, w przeciwieństwie do zwykłych stóp, stopy logarytmiczne mają charakter addytywny, co pozwala na wykorzystanie rozkładu normalnego.

Cena aktywów nie może być mniejsza od zera, dlatego zwykłe stopy zwrotu przyjmują wartości w przedziale od minus jeden (-100%) do plus nieskończoności. Logarytmiczne stopy zwrotu mogą przyjmować dowolne wartości.

Oczekiwana stopa zwrotu

Załóżmy, że cena instrumentu (a zatem i stopa zwrotu) jest zmienną losową dyskretną. Rozkład stopy zwrotu dany jest wówczas w postaci możliwych stóp zwrotu oraz prawdopodobieństw ich zrealizowania:

$$\begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m, \end{matrix} \tag{3}$$

gdzie:

r_i – i-ta możliwa do zrealizowania stopa zwrotu,

p_i – prawdopodobieństwo zrealizowania i-tej możliwej stopy zwrotu i

m – liczba możliwych stóp zwrotu.

Zachodzi wówczas zależność:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4}$$

Syntetyczną miarą dochodu, którą wyznacza się na podstawie rozkładu stopy zwrotu, jest tzw. oczekiwana stopa zwrotu (*expected return*), określona za pomocą wzoru:

$$r = \sum_{i=1}^{m} p_i r_i, \tag{5}$$

gdzie:

r – oczekiwana stopa zwrotu;

r_i – i-ta możliwa do osiągnięcia wartość stopy zwrotu;

p_i – prawdopodobieństwo osiągnięcia i-tej możliwości wartości stopy zwrotu;

m – liczba możliwych do osiągnięcia wartości stopy zwrotu.

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

Oczekiwana stopa zwrotu jest tutaj średnią ważoną możliwych stóp zwrotu, przy czym wagami są prawdopodobieństwa ich zrealizowania. Można ją interpretować jako stopę zwrotu, jakiej należy się spodziewać przy zrealizowaniu się „przeciętnego scenariusza".

Pozostałe miary oczekiwanej stopy zwrotu to: moda, mediana i średnia geometryczna stopy zwrotu. Moda jest wartością najczęściej obserwowaną spośród analizowanych danych. Mediana to wartość środkowa: wyznacza się ją z niemalejącego ciągu stóp zwrotu. Miara ta wykorzystywana jest w zastosowaniach rozkładów, które nie posiadają określonej wariancji i odchylenia standardowego. W celu określenia średniego poziomu wzrostu zwrotu z instrumentu wykorzystujemy średnią geometryczną:

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot\ldots\cdot(1+r_m)} - 1. \qquad (6)$$

Przykład

Na podstawie kursów zamknięcia akcji spółki BPH PBK obliczono dzienne logarytmiczne stopy zwrotu za okresy 16.06.2003–15.07.2003 oraz 16.07.2002–15.07.2003. Korzystając z modułu *Statystyki podstawowe* w programie *STATISTICA*, wyznaczono wymienione wyżej miary średniej oczekiwanej stopy zwrotu.
Dla okresu 16.06.2003–15.07.2003 otrzymano następujące wyniki:

$\bar{x} = 0{,}0078 \quad x_g = 0{,}0077 \quad Me = 0{,}0018,$

natomiast dla okresu 16.07.2002 – 15.07.2003:

$\bar{x} = 0{,}0011 \quad x_g = 0{,}0011 \quad Me = 0{,}0000.$

Pomiar ryzyka

Pomiar, ryzyka rozumianego jako zmienność stopy zwrotu z aktywu finansowego, może się odbywać poprzez zastosowanie dowolnej miary zmienności rozkładu stopy zwrotu.

Statystyczne miary zmienności dzielą się na bezwzględne (absolutne) i względne (relatywne). Do miar bezwzględnych zalicza się: rozstęp, rozstęp kwartylowy lub decylowy, odchylenie przeciętne, odchylenie ćwiartkowe (międzykwartylowe), wariancję oraz odchylenie standardowe. Względną miarą dyspersji jest współczynnik zmienności.

W przypadku rozkładów o znanej i skończonej wariancji najczęściej stosowaną miarą zmienności jest odchylenie standardowe stopy zwrotu. Im większe odchylenia możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu, tym większa wartość odchylenia standardowego stopy, a co za tym idzie, tym wyższe ryzyko inwestycji. Odchylenie standardowe przyjmuje wartości nieujemne. Wartość zerowa oznacza brak niepewności co do przyszłej stopy zwrotu.

Gdy znamy rozkład stopy zwrotu, tzn. wiemy, jakie są możliwe do osiągnięcia stany stopy zwrotu danego aktywu i prawdopodobieństwa ich osiągnięcia, odchylenie standardowe stopy zwrotu można obliczyć na podstawie poniższego wzoru.

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

$$\sigma_{st} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r})^2}. \tag{7}$$

Gdy nie ma możliwości uzyskania informacji na temat rozkładu stopy zwrotu, do oszacowania wariancji i odchylenia standardowego należy wykorzystać dane historyczne, pamiętając o tym, że powinny dotyczyć takiego samego okresu jak horyzont inwestycyjny inwestora. Wtedy wartością oczekiwaną jest średnia arytmetyczna stopa zwrotu, dana wzorem:

$$E(r) = \bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} r_t, \tag{8}$$

gdzie:

n – liczba okresów, z których pochodzą dane,

r_t – stopa zwrotu aktywu zrealizowana w t-tym okresie.

Natomiast do obliczenia tzw. odchylenia standardowego z próby stosuje się następujący wzór:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n}\left(r_t - \bar{r}\right)^2}. \tag{9}$$

W celu określenia ryzyka instrumentu, którego rozkład stóp zwrotu ma nieskończoną wariancję lub nie można jej wyznaczyć, stosowane jest odchylenie ćwiartkowe. Jest ono równe połowie różnicy między kwartylami górnym i dolnym:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \left(Q_3 - Q_1\right), \tag{10}$$

gdzie:

Q – odchylenie ćwiartkowe,

Q_3 – kwartyl trzeci (górny), czyli ta spośród wartości stóp zwrotu, która dzieli zbiór możliwych stóp zwrotu w ten sposób, że 75% stóp zwrotu jest nie wyższa, a 25% nie niższa od tej wartości,

Q_1 – kwartyl pierwszy (dolny), czyli ta spośród wartości stóp zwrotu, która dzieli zbiór możliwych stóp zwrotu w ten sposób, że 25% stóp zwrotu jest nie wyższa, a 75% nie niższa od tej wartości.

Odchylenie ćwiartkowe określa zróżnicowanie tylko 50% wartości stóp zwrotu położonych centralnie, zawartych między dwoma kwartylami. Na wartość odchylenia ćwiartkowego nie mają wpływu wartości jednostek mniejszych od kwartyla dolnego oraz większych od kwartyla górnego, chociaż zajmują one znaczną część obszaru zmienności. Tak więc odchylenie ćwiartkowe wnosi niepełną informację o zróżnicowaniu zbioru stóp zwrotu. Ma

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

jednak ważną zaletę: jest odporne na obserwacje nietypowe. Jako miernik ryzyka stosowany jest również rozstęp ćwiartkowy (kwartylowy), obliczany jako różnica między trzecim i pierwszy kwartylem. Posiada on takie same własności jak odchylenie ćwiartkowe.

Przykład

Dla danych wykorzystanych w przykładzie pierwszym obliczono wartości odchylenia ćwiartkowego, rozstępu ćwiartkowego i odchylenia standardowego. Dla okresu 16.06.2003 –15.07.2003 otrzymano:

$Q_o = 0{,}0089 \quad Q_r = 0{,}0178 \quad s = 0{,}0139,$

oraz dla okresu 16.07.2002–15.07.2003:

$Q_o = 0{,}0011 \quad Q_r = 0{,}0226 \quad s = 0{,}0204.$

Do rzadziej stosowanych bezwzględnych miar dyspersji należy odchylenie przeciętne stóp zwrotu, które również charakteryzuje się odpornością na występowanie obserwacji nietypowych. Jest ono równe średniej arytmetycznej bezwzględnych wartości odchyleń możliwych wartości stopy zwrotu od średniej stopy zwrotu:

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| r_i - \bar{r} \right|, \tag{11}$$

gdzie:

D – odchylenie przeciętne.

Jeśli za miarę dochodu przyjmiemy medianę stóp zwrotu, wtedy miarą zmienności (ryzyka), obok odchylenia ćwiartkowego, jest średnia arytmetyczna bezwzględnych odchyleń stóp zwrotu od mediany tych stóp zwrotu i wyraża się ona następującym wzorem:

$$s_{Me} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| r_i - Me \right|, \tag{12}$$

gdzie:

me – mediana stóp zwrotu.

Jeśli natomiast miarą dochodu jest średnia z dwóch wartości: maksymalnej i minimalnej stopy zwrotu, oznaczona jako m_r:

$$m_r = 0{,}5 \cdot \left(r_{\max} + r_{\min} \right), \tag{13}$$

wtedy miarą zmienności jest połowa rozstępu:

$$s_r = 0{,}5 \cdot \left(r_{\max} - r_{\min} \right). \tag{14}$$

Najprostszą miarą ryzyka względnego jest współczynnik zmienności stopy zwrotu (ang. *coefficient of variation*), określony za pomocą poniższego wzoru.

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

$$V = \frac{S}{\left|\overline{r}\right|}. \tag{15}$$

Ze wzoru (15) wynika, że współczynnik zmienności jest wielkością niemianowaną. Określa on, jakie ryzyko (mierzone odchyleniem standardowym stopy zwrotu) przypada na jednostkę dochodu (mierzonego oczekiwaną stopą zwrotu). Można go wyrazić procentowo przez przemnożenie ilorazu odchylenia standardowego i średniej arytmetycznej przez 100%. Do obliczenia współczynnika zmienności stosuje się również odchylenie przeciętne zamiast odchylenia standardowego.

Własności rozkładów w zastosowaniach finansowych

W podejmowaniu decyzji inwestycyjnych najważniejsze jest określenie przyszłej stopy zwrotu. Do opisu niepewności stosuje się podejście wynikające z rachunku prawdopodobieństwa. Polega ono na wykorzystaniu historycznych danych w celu uzyskania rozkładu stopy zwrotu. Znajomość rozkładu prawdopodobieństwa stopy zysku interesującego nas instrumentu finansowego lub portfela umożliwia oszacowanie przyszłego dochodu oraz ryzyka z nim związanego. Oszacowania tak uzyskanych parametrów rozkładu ekstrapoluje się na analizowany okres. Z punktu widzenia zastosowań finansowych ważne jest, aby analizowane rozkłady miały następujące własności:

- stacjonarność,
- skończoną wariancję.

Stacjonarność oznacza, że parametry rozkładu prawdopodobieństwa są niezmienne w czasie. W analizie finansowej główny nacisk często położony jest na ceny papierów wartościowych i innych instrumentów. Jednakże rozkłady prawdopodobieństwa cen mają niewielkie znaczenie w analizie statystycznej, ponieważ są zwykle niestacjonarne. Przyczyną tego są ciągłe zmiany cen w czasie. W szczególności ceny obligacji stale rosną. Dlatego też ich średnia cena i odchylenie standardowe, które są parametrami rozkładu normalnego, będą wyższe z każdym rokiem. Ponieważ, teoretycznie, ceny te mogą rosnąć do nieskończoności, natomiast nie mogą być mniejsze niż zero, to wraz z ich stałym wzrostem w czasie można zaobserwować tendencję do zwiększania się prawostronnej skośności rozkładów.

Podobnie rozkład prawdopodobieństwa zmian cen nie jest stacjonarny, ponieważ wielkość bezwzględnej zmiany cen instrumentów finansowych również podlega zmianom, tak jak sama cena. Zmiennymi niezależnymi od poziomu cen są: procentowa zmiana ceny i procentowa stopa zwrotu. Stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu pozwala analitykowi na oszacowanie przyszłej stopy zwrotu. Ponadto parametry rozkładu uzyskanego z historycznych wartości wykorzystuje się do szacowania niepewności związanej z przyszłym dochodem i są one podstawą do pomiaru przyszłego ryzyka.

Aby przekształcić efektywne estymatory parametrów rozkładów uzyskane na podstawie danych historycznych, czyli z próby, w parametry całej populacji, czyli również przyszłych

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

wartości, potrzeba, aby wariancja była skończona. Warunek ten musi być również spełniony, aby obliczyć odchylenie standardowe. W jakich warunkach wariancja może nie być skończona? Obecność licznych wartości ekstremalnych może prowadzić do sytuacji, w której kolejne oszacowania tego parametru z próby różnią się istotnie w zależności od badanej próby.

Niektórzy autorzy (por. T. Watsham, K. Parramore, 1997) zwracają uwagę na stabilność jako pożądaną własność rozkładów w analizie finansowej. Stabilnymi określa się takie rozkłady, których liniowa kombinacja jest rozkładem tego samego typu. Np. dodanie dwóch niezależnych rozkładów normalnych powinno generować rozkład normalny, chociaż z innymi parametrami niż dwa poprzednie. Własność tę można zilustrować następującym przykładem: rozważmy rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu z akcji spółki A w dwóch odrębnych jednodniowych okresach. Korzystne jest, aby rozkład stopy zwrotu z dwóch dni łącznie tej samej spółki był tego samego typu.

W trakcie modelowania stóp zwrotu z niektórych instrumentów finansowych spotykamy się z dwoma ważnymi pytaniami. Pierwsze wiąże się z założeniem o niezależności poszczególnych obserwacji w rozkładzie normalnym i log-normalnym. W rzeczywistości poszczególne stopy zwrotu są ze sobą powiązane i wykazują autokorelację. Drugie stawiane często pytanie dotyczy prawdopodobieństwa wystąpienia wartości ekstremalnych – są one obserwowane dużo częściej niż sugeruje to funkcja gęstości rozkładu normalnego.

Te dwa problemy, związane z rozkładem normalnym, wskazują na potrzebę wykorzystania w pewnych sytuacjach takiego rozkładu prawdopodobieństwa, którego funkcja gęstości jest bardziej leptokurtyczna (wysmukła) w konsekwencji występowania autokorelacji i który posiada „grubsze ogony", co jest spowodowane częstszym występowaniem danych odstających. Najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie takiego rozkładu, który umożliwia dostosowanie kształtu do istniejących danych. Tę własność posiada rodzina rozkładów stabilnych, ponieważ ich kształt można modelować za pomocą czterech parametrów:

- α, który określa grubość ogonów;
- β, który określa skośność rozkładu;
- δ, który określa rozproszenie rozkładu;
- μ, który określa położenie rozkładu.

Dla rozkładów stabilnych parametr α przyjmuje wartości z przedziału (0;2] i maksymalną wartość osiąga dla rozkładu normalnego. Praktyczne zastosowania pokazują jednak, że w przypadku modelowania logarytmicznych stóp zwrotu, najważniejsze są rozkłady, dla których α należy do przedziału (1;2], przy czym im mniejsza wartość indeksu, tym grubsze są ogony rozkładu.

Aby uzyskać rozkład symetryczny, parametr β powinien być równy zeru; dla rozkładu lewostronnie skośnego $\beta < 0$, a dla prawostronnie skośnego $\beta > 0$. Parametr β przyjmuje wartości z przedziału [-1;1].

Rodzina rozkładów stabilnych jest uogólnieniem rozkładu normalnego. W szczególności rozkład normalny jest rozkładem stabilnym. W rodzinie tej charakteryzuje się najmniejszą

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

leptokurtozą i ogonami o najmniejszej grubości. Poszczególne rozkłady można uzyskać poprzez kombinacje innych rozkładów (mnożąc kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych). Jest to bardzo atrakcyjna formuła uzyskiwania rozkładów o odpowiednich własnościach. Niestety nie można *explicite* podać wzoru na funkcję gęstości tak otrzymanego rozkładu, poza trzema szczególnymi przypadkami (rozkład normalny, Cauchy'ego i Levy'ego), co utrudnia znacznie wnioskowanie statystyczne. Ponadto wiąże się to z obliczaniem wartości prawdopodobieństw dla poszczególnych zmiennych losowych (przyszłych stóp zwrotu) dla każdego nowego rozkładu. Dodatkowym utrudnieniem jest nieskończona wariancja, która charakteryzuje wszystkie rozkłady stabilne poza normalnym.

W analizie finansowej najczęściej wykorzystywane są następujące rozkłady (K. Jajuga, 2000):

- rozkład dwumianowy (Bernoulliego),
- rozkład normalny (standaryzowany),
- rozkład log-normalny,
- rozkład Cauchy'ego.

Portfel inwestora

Ryzyko portfela nie może być mierzone jako średnia ważona wariancji stopy zwrotu każdego z walorów. Nie jesteśmy bowiem tutaj zainteresowani zmiennością stóp zwrotu poszczególnych papierów wartościowych, ale stopniem, w jakim papiery składające się na portfel podlegają takim samym fluktuacjom. Inaczej mówiąc, poszukujemy stopnia interakcji lub też współzmienności. Odpowiednią miarą jest kowariancja lub korelacja stóp zwrotu. W przypadku portfela składającego się z akcji dwóch spółek o udziałach w_1 i w_2 oczekiwana stopa zwrotu z portfela ma postać:

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2, \tag{16}$$

gdzie:

R_p – oczekiwana stopa zwrotu z portfela.

Z kolei wariancja stopy zwrotu z portfela (wariancja portfela) akcji dwóch spółek dana jest wzorem:

$$V_p = w_1^2 s_1^2 + w_2^2 s_2^2 + 2 w_1 w_2 s_1 s_2 \rho_{12}, \tag{17}$$

gdzie:

V_p – wariancja portfela,

s_1, s_2 – odpowiednio odchylenia standardowe stóp zwrotu akcji,

ρ_{12} – współczynnik korelacji.

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

Odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela (odchylenie standardowe portfela) akcji dwóch spółek jest pierwiastkiem z wariancji portfela:

$$s_p = (V_p)^{0,5}, \tag{18}$$

gdzie:

s_p – odchylenie standardowe portfela.

W przypadku portfela akcji dwóch spółek możemy mówić o portfelu o minimalnej wariancji (MVP, *minimum variance portfolio*). Można dowieść, że portfel o minimalnym ryzyku osiągany jest dla nieujemnych udziałów w portfelu, gdy zachodzi nierówność:

$$\rho_{12} < s_1 / s_2. \tag{19}$$

Wówczas minimalne ryzyko portfela akcji dwóch spółek osiągane jest dla następujących udziałów akcji w portfelu (K. Jajuga, T. Jajuga, 1996):

$$w_1 = (s_2^2 - s_1 s_2 \rho_{12}) / (s_1^2 + s_2^1 - 2 s_1 s_2 \rho_{12}), \tag{20}$$

$$w_2 = (s_1^2 - s_1 s_2 \rho_{12}) / (s_1^2 + s_2^1 - 2 s_1 s_2 \rho_{12}), \tag{21}$$

gdzie w_1 i w_2 oznacza udział poszczególnych walorów w portfelu.

Przykład

W celu zaprezentowania budowy portfela składającego się z dwóch walorów wybrano dwie spółki giełdy warszawskiej (WGPW) Żywiec S.A. i BPH PBK. W przykładzie wykorzystano kursy dzienne z okresu od 07.02.2001 do 03.07.2003 i na ich podstawie wyznaczono dzienne logarytmiczne stopy zwrotu. Tabela 1 zawiera statystyki opisowe otrzymanych szeregów dla obydwóch spółek, natomiast tabela 2 współczynnik korelacji.

Tabela 1.

Dane: Statystyki opisowe (bph_żywiec_portfel)

Statystyki opisowe (bph_żywiec_portfel)

Zmienna	Średnia	Mediana	Minimum	Maksimum	Dolny Kwartyl	Górny Kwartyl	Rozstęp	Rozstęp Kwartyl.	Wariancja	Odch.Std.
bph	0,000283	0,00	-0,102654	0,083382	-0,010846	0,012423	0,186036	0,023269	0,000473	0,021758
żywiec	0,000948	0,00	-0,063513	0,067558	-0,005510	0,008086	0,131072	0,013596	0,000220	0,014844

Tabela 2.

Dane: Korelacje (bph_żywiec_portfel)

Korelacje (bph_żywiec_portfel)
Oznaczone wsp. korelacji są istotne z p < ,05000
(Braki danych usuwano przypadkami)

Zmn. X & Zmn. Y	Średnia	Odch.st.	r(X,Y)	r2	t	p
bph	0,000283	0,021758				
żywiec	0,000948	0,014844	0,107367	0,011528	2,631983	0,008709

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

Korzystając z (19) mamy:

$s_1/s_2 = 0.0148/0.0217 = 0.682 > 0.107 = r_{12}$,

stąd na podstawie (20) i (21) wyznaczamy optymalne wagi spółek w portfelu o minimalnej wariancji: $w_1 = 0.3$ (BPH) i $w_2 = 0.7$ (Żywiec). Dla tak skonstruowanego portfela otrzymujemy portfel o następujących parametrach:

$\bar{x} = 0{,}0008 \quad Me = 0{,}0004 \quad s = 0{,}0129 \quad Q_r = 0{,}00145.$

W tabeli 3 zostały przedstawione wartości wymienionych parametrów dla różnych wag walorów w portfelu.

Tabela 3.

Nr	Waga BPH PBK	Waga Żywca	$\bar{x}$	Me	s	Q_r
1	0,0	1,0	0,00095	0,00000	0,01484	0,01359
2	0,1	0,9	0,00088	0,00021	0,01376	0,01361
3	0,2	0,8	0,00081	0,00040	0,01308	0,01387
4	0,3	0,7	0,00075	0,00033	0,01285	0,01537
5	0,4	0,6	0,00068	0,00000	0,01310	0,01615
6	0,5	0,5	0,00062	0,00054	0,01381	0,01735
7	0,6	0,4	0,00055	0,00059	0,01491	0,01764
8	0,7	0,3	0,00048	0,00048	0,01632	0,01805
9	0,8	0,2	0,00042	0,00058	0,01797	0,02002
10	0,9	0,1	0,00035	0,00029	0,01980	0,02164
11	1,0	0,0	0,00028	0,00000	0,21758	0,02327

Warto zwrócić uwagę, że konstruując portfel o minimalnej wariancji, optymalizujemy ryzyko mierzone za pomocą odchylenia standardowego. Dlatego średnia oczekiwana stopa zwrotu dla takiego portfela nie jest najwyższa, natomiast minimalną wartość przyjmuje odchylenie standardowe. W celu maksymalizacji średniej oczekiwanej stopy zwrotu ($\bar{x}$ lub Me) można zastosować jedną z metod optymalizacyjnych, np. metodę simplex, mnożników Lagrange'a lub graficzną. Poniżej został przedstawiony wykres typu dochód-ryzyko dla analizowanego portfela (rys.1).

Dla portfela składającego się z dowolnej liczby spółek mamy odpowiednio:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i, \tag{22}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 s_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_i w_j s_i s_j \rho_{ij}, \tag{23}$$

$$s_p = (V_p)^{0,5}, \tag{24}$$

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione

gdzie:

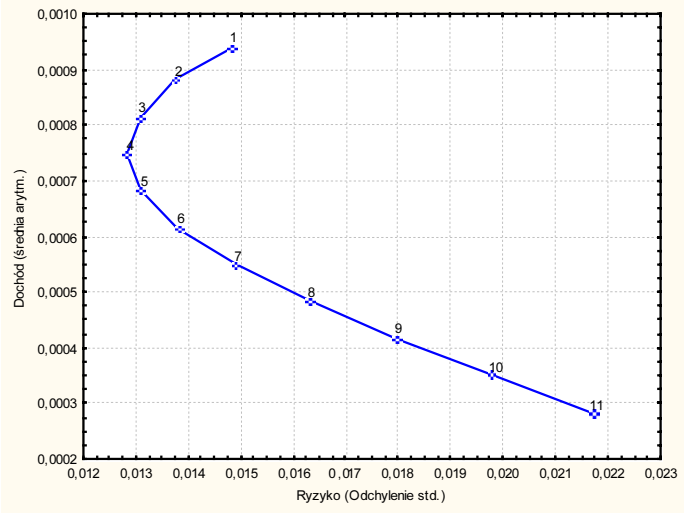
n – liczba spółek,

s_i – odchylenie standardowe (ryzyko) akcji i-tej spółki,

w_i – udział akcji i-tej spółki w portfelu,

ρ_{ij} – współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji i-tej spółki oraz j-tej spółki.

W celu optymalizacji wybranych parametrów rozkładu stóp zwrotu portfela wieloskładnikowego wykorzystywane są wymienione wyżej metody liniowe oraz bardziej efektywne metody nieliniowe.



Rys. 1. Wykres typu dochód-ryzyko dla portfela dwuskładnikowego

Literatura

1. Jajuga K., Jajuga T., Inwestycje, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
2. Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, pod red. K. Jajugi, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000.
3. Watsham T., Parramore K., Quantitative Methods in Finance, International Thomson Business Press, London 1997.

Copyright © StatSoft Polska, 2003
Kopiowanie lub powielanie w jakikolwiek sposób bez zgody StatSoft Polska Sp. z o.o. zabronione